

Matsui スペクトラムと thick 部分圏

北海道大学 大学院理学院 数学専攻
松川寿人 (Hisato MATSUKAWA) *

概要

与えられた三角圏の thick 部分圏の分類は伝統的な問題である. Matsui はその分類のため, 三角圏からスペクトラムを構成する方法を定めた. 筆者は Matsui スペクトラムでの台集合によってその三角圏の thick 部分圏が完全に分類できることを示した. また, いくつかの曲線の導来圏でその例を計算した. Ito, Matsui によると代数閉体上準射影的な被約代数多様体はその導来圏の Matsui スペクトラムに開に埋め込まれる. 筆者は導来無限圏を考えることでこの結果をより広いスキームへと拡張できることを示した.

1 導入

三角圏の thick 部分圏の分類は伝統的な問題であり, その三角圏を理解するための重要な道具の一つでもある. Balmer はテンソル三角圏のテンソル thick イデアルが Balmer スペクトラムにおける台集合によって, 完全にではないものの分類できることを示した ([Ba]). Matsui は [Ma1],[Ma2] にて Balmer スペクトラムの類似として三角圏 T のスペクトラム $\mathrm{Spec}_\Delta T$ を定めた. また, これを用いて Matsui と Takahashi は radical な thick 部分圏がその $\mathrm{Spec}_\Delta T$ における台集合で分類できることを示した ([MT]). 筆者は三角圏の素 thick 部分圏が十分たくさんあることを示し, 全ての thick 部分圏が $\mathrm{Spec}_\Delta T$ における台集合で分類できることを示した.

定理 1. T を三角圏, $\mathrm{Th}(T)$ を T の thick 部分圏の集合とする. このとき, 台集合を与える対応

$$\mathrm{Supp} : \mathrm{Th}(T) \rightarrow \{Z \subset \mathrm{Spec}_\Delta T\}$$

は左逆射

$$\{Z \subset \mathrm{Spec}_\Delta T\} \rightarrow \mathrm{Th}(T); \quad Z \mapsto \bigcap_{x \in \mathrm{Spec}_\Delta T \setminus Z} I_x$$

を持つ. ここで $\{Z \subset \mathrm{Spec}_\Delta T\}$ は Matsui スペクトラムの底空間の部分集合を表し, I_x は点 x に対応する素 thick 部分圏を表している.

とくに射 Supp は単射であり, 全ての thick 部分圏はその Matsui スペクトラムにおける台集合で決定される. また, 全ての thick 部分圏は素 thick 部分圏の交わりとして書ける, つまり radical である.

* E-mail: hmn0211@gmail.com

また, これを用いていくつかのスキームの導来圏の thick 部分圏を実際に分類した.

Matsui スペクトラムはその構成にテンソル構造を要請しない. よって, テンソル構造に縛られない導来同値なスキームの情報などを含んでいる. これが Matsui スペクトラムを考える上での利点の一つである.

Balmer は Balmer スペクトラムを用いてテンソル構造付きのスキームの導来圏から元のスキームを復元できることを示した. また, Ito と Matsui は被約スキーム X がその導来圏の Matsui スペクトラム $\mathrm{Spec}_{\Delta} \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ に埋め込めることを示した ([IM]). また, X が代数閉体上の被約擬射影的スキームの場合は開に埋め込めることを示した. ここで被約性は構造層の射を考えるためにのみ必要であり, 底空間の埋め込みを考える上では必要ない. 筆者は [IM] の結果を一般のスキームに拡張した.

定理 2. X を位相的にネーターなスキームとする. このとき

$$X_{\mathrm{red}} \rightarrow \mathrm{Spec}_{\Delta} \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$$

は開埋め込みである.

系 3. X, Y を位相的にネーターなスキームとする. もし X と Y が導来同値, つまり $\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X) \cong \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(Y)$ であれば開埋め込み

$$Y_{\mathrm{red}} \rightarrow \mathrm{Spec}_{\Delta} \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$$

が存在する.

また, 相対的な Matsui スペクトラムと安定無限圏におけるその類似を考えた. 相対的な Matsui スペクトラムはテンソル三角圏による作用で閉じている thick 部分圏を分類するものである. Matsui スペクトラムは一般には非常に計算が難しい. 相対的な Matsui スペクトラムは一般の Matsui スペクトラムよりも小さい分, 幾分か計算がしやすいという利点がある.

単に三角圏ではなく安定無限圏を考えることには幾つかの利点がある. 一つは被約でない構造層を持つスペクトラムを考えることが出来ることである. スキームの導来無限圏を考えることで上の定理は次のように拡張される.

定理 4. S をアフィンな対角写像を持つ準コンパクト準分離的スキームとする. X を S 上アフィンな対角写像を持つ位相的にネーターなスキームとする. このとき, 開埋め込み

$$X \rightarrow \mathrm{Spec}_{\mathrm{st}}^{\mathrm{D}_{\infty}^{\mathrm{perf}}(S)} \mathrm{D}_{\infty}^{\mathrm{perf}}(X)$$

が存在する. ここで $\mathrm{D}_{\infty}^{\mathrm{perf}}$ は導来無限圏を表す.

もう一つの利点は Lurie によるものを始めとする無限圏に対する様々な結果を用いてこれを調べられることである.

Balmer スペクトラムと Matsui スペクトラム

記号

スキーム X に対して $D^{\text{perf}}(X)$ を X の準連接層の導来圏のうち, perfect 複体と擬同型な対象たちのなす充満部分圏とする. また, $D_{\infty}^{\text{perf}}(X)$ を X の準連接層の導来無限圏における同様の充満部分圏とする.

1.1 Balmer スペクトラム

この小節では [Ba] に基づいて Balmer スペクトラムの説明をする. Balmer スペクトラムとは Balmer によって導入されたテンソル三角圏に対して定まる環付き空間である. これはテンソルイデアルをその台集合によってよく分類する. また, スキームの導来圏の Balmer スペクトラムは元のスキームを復元する.

T を三角圏とする. また, $\otimes$ を T の対称モノイダル構造であるとする.

定義 5 ([Ba]). $(T, \otimes)$ がテンソル三角圏であるとは, 任意の $a \in T$ に対して関手 $a \otimes - : T \rightarrow T$ が完全であることをいう.

入っているテンソル構造が文脈上明らかな場合は $(T, \otimes)$ を単に T と略記する.

定義 6 ([Ba]). T をテンソル三角圏とする.

- (1) Thick 部分圏 $I \subset T$ がテンソルイデアルであるとは, 任意の $a \in T, b \in I$ について $a \otimes b \in I$ となることをいう.
- (2) テンソルイデアル $I \subset T$ が radical であるとは, 任意の $a \in T$ について, ある n があって $a^{\otimes n} \in I$ ならば $a \in I$ であることをいう.
- (3) テンソルイデアル $I \subset T$ が素であるとは, 任意の $a, b \in T$ に対して $a \otimes b \in I$ ならば $a \in I$ または $b \in I$ となることをいう.

$\text{Spec}_{\otimes} T$ を T の素イデアル全体の集合とする. 部分集合 $S \subset T$ に対してその台集合を

$$\text{Supp}_{\text{Spec}_{\otimes} T}(S) = \{I \in \text{Spec}_{\otimes} T \mid S \not\subset I\}$$

と定める.

補題 7 ([Ba]). (1) $\text{Supp}(a \oplus b) = \text{Supp}(a) \cup \text{Supp}(b)$.

(2) $\text{Supp}(a \otimes b) = \text{Supp}(a) \cap \text{Supp}(b)$.

$\text{Spec}_{\otimes} T$ に $\text{Spec}_{\otimes} T \setminus \text{Supp}_{\text{Spec}_{\otimes} T}(a)$ ($a \in T$) で生成される位相を入れ, これをもって位相空間とする.

$I \subset T$ をテンソルイデアルとする. このとき Verdier 商 T/I にも自然にテンソル構造が入り, テンソル三角圏となる.

部分集合 $S \subset \text{Spec}_\otimes T$ に対して

$$I_S = \bigcap_{I \in S} I$$

と定める。これはテンソルイデアルである。対応

$$U \mapsto \text{End}(1_{T/I_U})$$

によって位相空間 $\text{Spec}_\otimes T$ 上に可換環の前層を定める。ここで $1_{T/I_U}$ はテンソル三角圏 T/I_U の単位対象である。 $\mathcal{O}_{T,\otimes}$ をその層化とする。

定義 8 ([Ba]). テンソル三角圏 T に対し、環付き空間

$$\text{Spec}_\otimes T = (\text{Spec}_\otimes T, \mathcal{O}_{T,\otimes})$$

をその Balmer スペクトラムという。

Balmer スペクトラムは次の意味でスキームの拡張となっている。

定理 9 ([Ba]). X を位相的ネーターなスキームとする。このとき環付き空間の同型

$$X \cong \text{Spec}_\otimes \text{D}^{\text{perf}}(X)$$

が存在する。 $\text{D}^{\text{perf}}(X)$ には X から定まる標準的なテンソル構造を考えている。

1.2 Matsui スペクトラム

この小節では [Ma1, Ma2] に基づいて Matsui スペクトラムの説明をする。Matsui スペクトラムは Matsui によって Balmer スペクトラムの類似として定義された。Balmer スペクトラムとの最も大きな違いはその定義にテンソル構造を必要としないことである。よってテンソル構造に縛られない一般の thick 部分圏の情報や、スキームの導来同値の情報などを含んでいる。

以降、三角圏 T の thick 部分圏の集合を $\text{Th}(T)$ で表す。また、部分集合 $S \subset T$ に対して S で生成される T の thick 部分圏を $\langle S \rangle$ で表す。 $\langle S \rangle = T$ なら S は T を分裂生成するという。

定義 10 ([Ma1, Ma2]). T を三角圏とする。

- (1) Thick 部分圏 $I \subset T$ が素であるとは、集合 $\{J \in \text{Th}(T) \mid J \supsetneq I\}$ が包含関係に関して最小元をもつことをいう。このとき、その最小元を $\bar{I}$ で表す。
- (2) Thick 部分圏 $I \subset T$ が radical であるとは、 I が素 thick 部分圏の共通部分としてかけることをいう。

$\text{Spec}_\Delta T$ を T の素イデアルの集合とする。部分集合 $S \subset T$ に対してその台集合を

$$\text{Supp}_{\text{Spec}_\Delta T}(S) = \{I \in \text{Spec}_\Delta T \mid S \not\subset I\}$$

と定める。 $\text{Spec}_\Delta T$ に $\text{Spec}_\Delta T \setminus \text{Supp}_{\text{Spec}_\Delta T}(a)$ ($a \in T$) で生成される位相を入れ、これをもって位相空間とする。

部分集合 $S \subset \text{Spec}_\Delta T$ に対して

$$I_S = \bigcap_{I \in S} I$$

と定める. これは T の thick 部分圏である. Verdier 商の冪等完備化によって

$$T_S = \text{Idem} D / I_S$$

と定める.

圏の間の関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と自然変換 $\eta : F \rightarrow F$ に対して, F が局所冪零であるとは任意の $a \in \mathcal{C}$ に対して η_a が冪零であることをいう.

対応

$$U \mapsto \{\eta \in \text{Nat}(\text{Id}_{T_U}, \text{Id}_{T_U}) \mid \eta[1] = [1]\eta\} / \{\text{左のうち局所冪零な自然変換}\}$$

によって位相空間 $\text{Spec}_\Delta T$ 上に可換環の前層を定める. この層化を $\mathcal{O}_{T,\Delta}$ とする.

定義 11 ([Ma1, Ma2]). 三角圏 T に対し, 環付き空間

$$\text{Spec}_\Delta T = (\text{Spec}_\Delta T, \mathcal{O}_{T,\Delta})$$

をその Matsui スペクトラムという.

次の命題から, thick 部分圏や Matsui スペクトラムを考える上では冪等完備化は何の影響も及ぼさない. よって必要ならば冪等完備化して物事を考えてもよい.

命題 12 ([Ma1, Ma2]). T, T' を三角圏, $F : T \rightarrow T'$ を忠実充満三角関手とする. また, 任意の $a \in T'$ に対してある $b \in T$ があって a は $F(b)$ の直和因子になっているとする. このとき, 次が成り立つ.

- (1) $\text{Th}(T) \cong \text{Th}(T')$.
- (2) $\text{Spec}_\Delta T \cong \text{Spec}_\Delta T'$.

命題 13 ([Ma1, Ma2]). T を三角圏, $I \subset T$ を thick 部分圏とする. このとき, 埋め込み

$$\text{Spec}_\Delta T / I \rightarrow \text{Spec}_\Delta T$$

が存在する. I が有限生成ならこの射は開埋め込みである.

定理 14 ([Ma1, Ma2, IM]). X をネータースキームとする. このとき, 埋め込み

$$X_{\text{red}} \rightarrow \text{Spec}_\Delta \text{D}^{\text{perf}}(X)$$

が存在する. X が準アフィンならば上の射は同型である. X が代数閉体 k 上の準射影的スキームならば上は開埋め込みである.

例 15 ([Ma2]). k を代数閉体とする.

- (1) 射影直線の Matsui スペクトラムは以下のようにになっている.

$$\text{Spec}_\Delta \text{D}^{\text{perf}}(\mathbb{P}_1) \cong \mathbb{P}_1 \coprod \left(\coprod_{\mathbb{Z}} \text{Spec } k \right)$$

(2) E を楕円曲線とする. このとき,

$$\mathrm{Spec}_{\Delta} \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(E) \cong \coprod E.$$

右辺は加算無限個の余積である.

参考文献

- [Ba] P. Balmer, *The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories*, J. Reine Angew. Math. 588 (2005), 149–168.
- [IM] D. Ito, H. Matsui, *A new proof of the Bondal-Orlov reconstruction using Matsui spectra*, arXiv preprint arXiv:2405.16776 (2024).
- [MT] H. Matsui, R. Takahashi, *Construction of spectra of triangulated categories without tensor structure and applications to commutative rings*, J. Math. Soc. Japan 72 (2020), no. 4, 1283–1307.
- [Ma1] H. Matsui, *Prime thick subcategories and spectra of derived and singularity categories of noetherian schemes*, Pacific Journal of Mathematics 313 (2021), no. 2, 433–457.
- [Ma2] H. Matsui, *Triangular spectra and their applications to derived categories of noetherian schemes*, arXiv preprint arXiv:2301.03168 (2023).